

# Równania różniczkowe zwyczajne (z laboratorium)

Egzamin 14.06.2025 (I termin), 150 min

Proszę **każde zadanie rozwiązywać na osobnej kartce**, podpisanej **własnym imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu**. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.

Na ocenę będzie miało istotny wpływ **uzasadnienie** wszystkich przedstawianych wyników.

**Zadanie 1.** Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania  $x(t)$  zagadnienia

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \sqrt{|x|} + \frac{1}{2} \sin t, \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

dla wszystkich  $t > 0$ .

**Zadanie 2.** Rozważmy schemat różnicowy dla parametru  $a \in \mathbb{R}$

$$x_{n+2} + (a-1)x_{n+1} - ax_n = \frac{h}{4}((a+3)f_{n+2} + (3a+1)f_n).$$

- a) Zbadaj rząd schematu w zależności od parametru  $a$ .
- b) Czy schemat ten jest zgodny?
- c) Dla jakich wartości parametru  $a$  schemat ten jest stabilny? A dla jakich silnie stabilny?

**Zadanie 3.** Oblicz pochodną  $\frac{\partial x}{\partial \mu}|_{\mu=0}$  rozwiązania zagadnienia

$$\ddot{x} + 4x = 3 \sin t + 4\mu t(x^2 + \cos^2 t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \mu + 1.$$

**Zadanie 4.**

Znajdź rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 3y + e^t, \\ \dot{y} = -10x + 7y + t \end{cases}$$

z warunkiem początkowym  $x(0) = y(0) = 1$ .

**Zadanie 5.** Zbadaj stabilność i asymptotyczną stabilność w sensie Lapunowa zerowego rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - x^5, \\ \dot{y} = ax - y - y^3, \end{cases}$$

w zależności od parametru  $a \in \mathbb{R}$ .